数理解析研究所講究録
150巻 1972年 49-70

逐次解析の統計的構造

大阪市大　大学院　三浦良造

§1.　序と概論

逐次解析を測度論的に議論することを試みた。

ここでは、seqential procedure の sufficiency, dominatedness, completeness. を扱った。

$\mathcal{X}$ を点 x の集合とする。$\mathcal{O}\!\iota$ を $\mathcal{X}$ の部分集合のつくる σ-field とし、$\mathcal{P}$ を $\mathcal{O}\!\iota$ 上の確率測度の集合とする。このような ($\mathcal{X}$, $\mathcal{O}\!\iota$, $\mathcal{P}$) を統計空間と呼ぶことにする。

逐次解析は、($\mathcal{X}$, $\mathcal{O}\!\iota$, $\mathcal{P}$) において次の (i)(ii)(iii) に従って遂行される行為である。

(i) 各 n ($\neq 0$) について、$\mathcal{O}\!\iota_n \subseteq \mathcal{O}\!\iota_{n+1}$ である $\mathcal{O}\!\iota$ の sub σ-field の列 $\{\mathcal{O}\!\iota_n\}_{0\leq n\leq\infty}$。　但し、$\mathcal{O}\!\iota_0 = \mathcal{O}\!\iota_\infty = \mathcal{O}\!\iota$ とする。

(ii) 各 n について、$\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{O}\!\iota_n$ である σ-field の列 $\{\mathcal{B}_n\}_{0\leq n\leq\infty}$.

(iii) 各 n について、$a_n(x)$ が $\mathcal{O}\!\iota_n$-可測である関数の列 $\{a_n(x)\}_{0\leq n\leq\infty}$.

但し、$a_n(x)$ は $\mathcal{X}$ から閉区間 $[0,1]$ 上への関数で

すべての $x\in\mathfrak{X}$ に対して $\sum_{0\le n\le\infty} a_n(x)=1$ をみたすものである。これは、stopping rule と呼ばれる。すなわち $x\in\mathfrak{X}$ に対して，$a_n(x)$ は x が n 回目の sampling で stopp する確率である。

この設定は可算個の統計空間 $(\mathfrak{X}^i, \mathfrak{A}^i, \mathcal{P}^i)$, $i=1,2,\cdots\cdots$ の(カルテシアン)直積空間を背景としておいている。
すなわち，下のように対応している。

$$\mathfrak{X}\longleftrightarrow\prod_{1\le i<\infty}\mathfrak{X}^i,\qquad \mathfrak{A}\longleftrightarrow\prod_{1\le i<\infty}\mathfrak{A}^i$$

$$\mathcal{P}\longleftrightarrow\prod_{1\le i<\infty}\mathcal{P}^i,\qquad \mathfrak{A}_n\longleftrightarrow\prod_{1\le i\le n}\mathfrak{A}^i\times\mathfrak{X}^{n+1}\times\mathfrak{X}^{n+2}\times\cdots\cdots$$

また，$\{\mathcal{B}_n\}_{0\le n\le\infty}$ は統計量の列 $\{T_n\}_{0\le n<\infty}$ に対応している。すなわち，各 n に対して $\mathcal{B}_n$ は T_n によって induce された σ-field に対応している。T_n は $\mathfrak{X}^1\times\cdots\cdots\times\mathfrak{X}^n$ を定義域としているから $\mathcal{B}_n\subseteq\mathfrak{A}_n$ とおくのは自然である。

さて，ここでは stopping rule が non-randomized である場合だけを考えている。それは各 n について $a_n(x)$ が，すべての $x\in\mathfrak{X}$ に対して $a_n(x)=0$ 又は 1．をみたしている場合である。このとき各 n に対して，$S_n=\{x\in\mathfrak{X}: a_n(x)=1\}$ とおけば，すべての $x\in\mathfrak{X}$ に対して，$a_n(x)=\chi_{S_n}(x)$ である。

従って non-randomized stopping rule $\{a_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ は，集合の列 $\mathcal{S}=\{S_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ でおきかえられる。以後，ここでは stopping rule と言えば non-randomized stopping rule のことであり、それを．$\mathcal{S}=\{S_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ で表わすことにする。

なお．$S_0\ (\in\mathcal{S})$ は sampling をしないで決定を行う $x\in\mathfrak{X}$ の全体である。逐次解析を始めるとき．まず，sampling をするかどうかを決めるのだが，少なくとも1回は sampling をするのであれば $S_0=\phi$ であり，そうでなければ，$S_0=\mathfrak{X}$ である。各 $n\ (0<n<\infty)$ に対して S_n は n 回目で sampling を stop する $x\in\mathfrak{X}$ の全体であり，S_∞ はいつまでも sampling をやめない $x\in\mathfrak{X}$ の全体である。

次に σ-field の列 $\{\mathfrak{A}_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ 又は $\{\mathcal{B}_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ と stopping rule $\mathcal{S}=\{S_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ によって、つくられる $\mathfrak{A}$ の sub σ-field $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ 又は $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ を考える。これは各 n について．S_n 上で $\mathfrak{A}_n$ 又は $\mathcal{B}_n$ を考えた σ-field である。

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は．統計量の列 $\{T_n\}_n$ があるとき $T_n(x_1,\cdots,x_n)$ の値をみて，sampling を stop するかどうかを決め，$T_n(x_1,\cdots,x_n)$ の値を記録する場合、すなわち統計量 (N, T_N) に対応する。但し、N は sampling を stop した番号とする。

推定量は、$\mathfrak{X}$ から推定される空間への関数である。統計量

の値を見て，samplingをstopし，推定する場合は推定量が$\mathcal{B}(\mathcal{S})$－可測であることに対応している。

$\mathcal{O}(\mathcal{S})$は$(x_1, \cdots, x_n)$そのものを見て，決定し，記録する場合に対応する。

以上で述べたことより，逐次解析におけるsufficiency, dominatedness, completenessを$(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$において考えることは自然である。

§2. Sequencial Procesure の Sufficiency.

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$において§1で述べた$\mathcal{O}$のsub σ-fieldの列$\{\mathcal{O}_n\}_n$と$\{\mathcal{B}_n\}_n$が与えられているとする。但し，$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_\infty = \mathcal{O}$とする。

[定義 2.1] $\mathcal{X}$の部分集合の列$\mathcal{S} = \{S_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$が次の(i)(ii)(iii)をみたすとき$\mathcal{S}$がstopping ruleであるという。

(i) 各nに対して　$S_n \in \mathcal{O}_n$

(ii) $\bigcup_{0 \leq n \leq \infty} S_n = \mathcal{X}$

(iii) 各m, n $(m \neq n)$に対して，$S_m \cap S_n = \phi$.

[定義 2.2] stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_n$がclosedであるとはすべての$p \in \mathcal{P}$に対して　$p(\bigcup_{0 \leq n < \infty} S_n) = 1$，すなわち$p(S_\infty) = 0$をみたすことである。

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$をsequential procedureと

呼ぶ。

以後、次の仮定をおく。

仮定[I]. $S_0 = \phi$.

仮定[II] stopping rule は closed.

[補題 2.1] $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$ において $\{\mathcal{B}_n\}_{1\leq n\leq\infty}$ を $\mathcal{O}$ の sub σ-field の任意列とする。$\mathcal{S} = \{S_n\}_{1\leq n\leq\infty}$ を $\mathcal{O}$-可測集合の列で次の(i)(ii)をみたすものとする。

(i) $\bigcup_{1\leq n\leq\infty} S_n = \mathfrak{X}$,　(ii) $S_n \cap S_m = \phi$, $(n \neq m)$.

このとき、$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{1\leq n\leq\infty} (S_n \cap B_n) ; B_n \in \mathcal{B}_n, 1 \leq n \leq \infty\}$ とおけば、$\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{O}$ の sub σ-field である。

[補題 2.2] $\{\mathcal{B}_n\}_n$ と $\mathcal{S}$ は補題 2.1 と同じものとする。f を $\mathcal{O}$-$\mathcal{P}$-可積分関数とするとき、任意の $p \in \mathcal{P}$ について次の等式が成り立つ。

$$E_p[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S})] = \sum_{1\leq n\leq\infty} \frac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n}, \quad [\mathcal{O}, p]$$

但し、各 n について、$E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n](x) = 0$ となる x に対しては、$\dfrac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n](x)}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n](x)} = 0$ と定義する。

証明) 任意の n と任意の $B_n \in \mathcal{B}_n$ に対して

$$\int_{S_n \cap B_n} \sum_{1\leq n\leq\infty} \frac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} \, dp$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} \frac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} \cdot \chi_{B_n} \, dp$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} \frac{E_p[f\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n] \cdot \chi_{B_n} dp$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} E_p[f \cdot \chi_{S_n} \cdot \chi_{B_n} | \mathcal{B}_n]\, dp$$

$$= \int_{S_n \cap B_n} f\, dp .$$

故に $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ の任意の元 $B = \bigcup_{1 \le m \le \infty} (S_m \cap B_m)$ に対して.

$$\int_{\bigcup_m (B_m \cap S_m)} \sum_n \frac{E_p[f\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} dp = \int_{\bigcup_m (S_m \cap B_m)} f\, dp.$$ (証終)

[補題 2.3] $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ において, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ を $\mathcal{A}$ の任意の sub σ-field の組とし. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ を $\mathcal{A}$-可測集合の組で. $S_1 \cap S_2 = \phi$, $S_1 \cup S_2 = \mathfrak{X}$ をみたすものとする。

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \{(S_1 \cap A_1) \cup (S_2 \cup A_2) \ ; \ A_i \in \mathcal{A}_i,\ i=1,2\}$$

とおけば次の (i) (ii) が成り立つ。

(i) 任意の $\mathcal{A}_i$-可測関数 f に対して $f\chi_{S_i}$ は $\mathcal{A}(\mathcal{S})$-可測である。 $(i=1,2)$.

(ii) S_i が $\mathcal{A}_i$-可測集合であるとき, 任意の $\mathcal{A}(\mathcal{S})$-可測関数 g に対して. $g\chi_{S_i}$ は. $\mathcal{A}_i$-可測関数である。$(i=1,2)$.

[定義 2.3] sequential procedure $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \{\mathcal{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が sufficient であるとは, $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ において. $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ が $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ に対して sufficient であること。

但し. $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ の定義は. 補題 2.1 で与えたものである。

$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{B}(\mathcal{S})$ は明らかである。

[定義2.4] $\{\mathcal{B}_n\}_{1\leq n\leq\infty}$が sufficient sequence であるとは、
各 n について、$\mathcal{B}_n$: suff. for $\mathcal{O}_n$ であること。

(注). $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{B}_\infty = \mathcal{O}$ とおいているから、常に $\mathcal{B}_\infty$: suff. for $\mathcal{O}_\infty$.

[定理2.1] 任意の stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_{1\leq n\leq\infty}$ に対して、
sequential procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が、
sufficient であるための必要十分条件は $\{\mathcal{B}_n\}_n$ が
sufficient sequence であること。

証明)

(十分) 任意の $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ ―可測集合 A に対して、その定義関数の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$
に関する条件付期待値が $p\in\mathcal{P}$ に無関係であることを示す。

$A = \bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n \cap A_n)$, $A_n \in \mathcal{O}_n$, $(1\leq n\leq\infty)$ と表わされる。
各 n について、$A\cap S_n = S_n \cap A$ である。そして $S_n\cap A_n \in \mathcal{O}_n$, $S_n \in \mathcal{O}_n$ だから、$\mathcal{B}_n$: suff. for $\mathcal{O}_n$ より、
$\chi_{S_n}\cdot\chi_{A_n}$, χ_{S_n} の $\mathcal{B}_n$ に関する条件付期待値は
p に無関係である。補題2.2より、任意の $p\in\mathcal{P}$ に対して、

$$E_p[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S})] = \sum_{1\leq n\leq\infty}\frac{E_p[\chi_A\cdot\chi_{S_n}\mid\mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n}\mid\mathcal{B}_n]}\chi_{S_n}, \quad [\mathcal{O}, p]$$

$$= \sum_{1\leq n\leq\infty}\frac{E[\chi_A\cdot\chi_{S_n}\mid\mathcal{B}_n]}{E[\chi_{S_n}\mid\mathcal{B}_n]}\chi_{S_n}.$$

故に左辺は p に無関係である。

(必要) 任意の n を固定して、$S_n = \mathcal{X}$, $S_m = \phi$ $(m\neq n)$ である stopping rule $\mathcal{S}$ を与えると $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \mathcal{B}_n$, $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}_n$ で

ある。仮定より、$\mathcal{B}_n$: suff. for $\mathfrak{A}_n$ となる。nは任意であったから、$\{\mathcal{B}_n\}_n$ は sufficient sequence である。(証終)

[定理 2.2]

任意の stopping rule $\mathcal{S}=\{S_n\}_{1\leq n\leq\infty}$ に対して、
$(\mathcal{X}, \mathfrak{A}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ が dominated であるための必要十分条件は、各nについて$(n\neq\infty)$、$(\mathcal{X}, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P})$ が dominated であること。

証明)

(十分) 条件より、各nについて$(n\neq\infty)$、$\mathfrak{A}_n$上のσ−有界測度μ_nが存在して、μ_nは$(\mathcal{X}, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P})$を dominate する。

任意の$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$−可測集合 $A=\bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n\cap A_n)$ に対して、

$$\mu(A)=\sum_{1\leq n<\infty}\mu_n(S_n\cap A_n)+p(S_\infty\cap A_\infty).$$

(但し、pは任意固定$\in\mathcal{P}$)と定義すればμは$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$上の$\sigma$−有界測度である。($\mathcal{S}$が closed であるから $p(S_\infty\cap A_\infty)=0$ である。)

また、μは$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$上の$\mathcal{P}$をdominate する。

∵ $\mathfrak{A}(\mathcal{S})\ni A=\bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n\cap A_n)$に対して

$\mu(A)=0$ ならば、各n $(1\leq n<\infty)$について $\mu_n(S_n\cap A_n)=0$

故に、任意の$p\in\mathcal{P}$に対して $p(S_n\cap A_n)=0$.

従って、任意の$p\in\mathcal{P}$に対して、

$$p(A)=\sum_{1\leq n<\infty}p(S_n\cap A_n)=0.$$

(必要) 任意の n を固定して，$S_n = \mathcal{X}$，$S_m = \phi$ $(n \neq m)$ である stopping rule s を与えれば，$\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}_n$ となり，条件より，$(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$ は dominated である。n は任意であった。(証終)

任意の σ-field $\mathcal{B}$ と任意の部分集合 A に対して

$$\mathcal{B} \cap A = \{ B \cap A : B \in \mathcal{B} \}$$

と定義する。

Bahadur の定理を用いて，dominatedness より得られる $(\mathcal{X}, \mathcal{O}(s), \mathcal{P})$，$(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$，$(1 \leq n < \infty)$ の最小の sufficient sub σ-field を $\mathcal{B}^*$，$\mathcal{B}_n^*$，$(1 \leq n < \infty)$ とすれば，$\mathcal{B}^* \cap S_n \subseteq \mathcal{B}_n^* \cap S_n$，$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$，$(1 \leq n < \infty)$ である。なぜなら

$$\mathcal{B}^*(s) = \{ \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap B_n^*) : B_n^* \in \mathcal{B}_n^* \ 1 \leq n < \infty, \ B_\infty^* \in \mathcal{O} \}$$

とおけば，定理 2.1 より，$\mathcal{B}^*(s)$: suff. for $\mathcal{O}(s)$ である。

$\mathcal{B}^*$ の最小性より，$\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}^*(s)$，$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ であるから，各 n $(1 \leq n < \infty)$ に対して，$\mathcal{B}^* \cap S_n \subseteq \mathcal{B}^*(s) \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n$，$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ である。

しかし，この逆は，成り立たない。

でも，各 n $(1 \leq n < \infty)$ について $S_n \in \mathcal{B}_n^*$ という条件を付加すれば，$\mathcal{B}^* \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n$ $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ が成り立つ。それを示すために，$\mathcal{B}^* \cap S_n \subsetneqq \mathcal{B}_n^* \cap S_n$，$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ と仮定して矛盾を導こう。

$$\mathcal{B}_n^{*\prime} = \{ (S_n \cap B) \cup (S_n^c \cap B_n) ; B \in \mathcal{B}^*, \ B_n \in \mathcal{B}_n^* \}$$

とおく。

(i) $\mathcal{B}_n^{*\prime} \subsetneq \mathcal{B}_n^*$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$

∵ $S_n \cap \mathcal{B}_n^{*\prime} = S_n \cap \mathcal{B}^* \subsetneq S_n \cap \mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{B}_n^*$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$

$S_n^c \cap \mathcal{B}_n^{*\prime} = S_n^c \cap \mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{B}_n^*$

∴ $\mathcal{B}_n^{*\prime} \subsetneq \mathcal{B}_n^*$ $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$.

(ii) $\mathcal{B}_n^{*\prime}$; suff. for $\mathcal{O}_n$.

∵ f を $\mathcal{O}_n$－$\mathcal{P}$－可測積分関数とすれば

$$E_p[f \mid \mathcal{B}_n^{*\prime}] = \frac{E[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}^*]}{E[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}^*]}\chi_{S_n} + \frac{E[f\chi_{S_n^c} \mid \mathcal{B}_n^*]}{E[\chi_{S_n^c} \mid \mathcal{B}_n^*]}\chi_{S_n^c} \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

右辺の第１項が P に無関係であるのは，$f\chi_{S_n}$, χ_{S_n} が $\mathcal{O}(\mathcal{S})$－可測関数だからである。

故に $\mathcal{B}_n^{*\prime}$: suff. for $\mathcal{O}_n$.

(i) と (ii) を合わせると，$\mathcal{B}_n^*$ が $\mathcal{O}_n$ の最小の sufficient sub σ-field であることに矛盾する。故に $\mathcal{B}^* \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$.

このことは，各 n $(1 \leq n < \infty)$ について成り立つ。

§3. Sequential Procedure の Completeness.

[定義 3.1] Sequential Procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{X}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が complete であるとは $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ が complete であること。

(注) 任意の stopping rule に対して seq. proc. が complete ならば各 n $(1 \leq n < \infty)$ について $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$ が complete であること，又，その逆は成り立たないことは，共に明らかである。

[定理3.1] $\{\mathcal{B}_n\}_n$ を sufficient sequence とする。

2つの seq. proc. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, P, \{\mathfrak{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S}_i)$ $i=1,2$, が

それぞれ complete ならば, $\mathcal{S}_1=\{S_n^1\}_n$, $\mathcal{S}_2=\{S_n^2\}_n$, を合成

した $\mathcal{S}=\{S_n\}_n$ を与えた seq. proc. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, P, \{\mathfrak{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$

は complete である。

但し, 合成した stopping rule $\mathcal{S}$ とは, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ のどちらかが stop せよと命じたとき stop する stopping rule のことである。$\mathcal{S} \ni S_n$ は, $S_n = S_n^1 \cup S_n^2 - \bigcup_{i=1}^{n-1}(S_i^1 \cup S_i^2)$

と表わせばよい。

定理の証明の前に補題を示す。

[補題3.1]

$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}$ を定理3.1で述べたものとする。このとき, $\mathcal{S}$ は stopping rule であり, $\mathfrak{A}(\mathcal{S}_i) \geq \mathfrak{A}(\mathcal{S})$, $i=1,2$, である。

証明)

・$\mathfrak{A}(\mathcal{S}_1) \geq \mathfrak{A}(\mathcal{S})$ を示す。

$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ の任意の元 $A = \bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n \cap A_n)$ に対し,

任意の m に対して,

$$A \cap S_m^1 = \left(S_m^1 \cap \bigcup_{1\leq n\leq m}(S_n \cap A_n)\right) \cup \left(S_m^1 \cap \bigcup_{m<n\leq\infty}(S_n \cap A_n)\right)$$

第1項は $\mathfrak{A}_m$ に属する。

① 各集合は $\mathfrak{A}_n$ $(n \leq m)$ に属し, $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_m$ である。

第2項は空である。

$$∵ 第2項 = \bigcup_{m+1 \leq n \leq \infty} (S_m^1 \cap S_n \cap A_n)$$

(S_nの定義より $n \geq m+1$ ならば $S_m^1 \cap S_n = \phi$)

$$= \phi$$

故に $A \cap S_m^1 \in \mathfrak{A}_m$.

よって $A = \bigcup_{1 \leq m < \infty} (A \cap S_m^1) \in \mathfrak{A}(\mathcal{S}_1)$.

$\mathfrak{A}(\mathcal{S}_2) \supseteq \mathfrak{A}(\mathcal{S})$も同様にして示される。他は明らか。(証終)

[補題3.2]

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}$を定理3.1で述べたものとする。$A = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap S_n^1)$ とおく。$A_1 \subseteq A$, $A_2 \subseteq A$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $i=1,2$, に対して,

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' = \{(A_i \cap B_1) \cup (A_i^c \cap B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)\}$とおく。

このとき,任意の$\mathcal{B}(\mathcal{S})$−可測関数fに対して,$f\chi_{A_i}$は,$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$−可測である。($i=1,2$.)

証明)

まず,次のことをたしかめておく。

$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$を任意のsub σ-fieldとし,Aを任意の部分集合とする。$\mathfrak{A}_1 \cap A = \mathfrak{A}_2 \cap A$ ならば任意の$\mathfrak{A}_1$−可測関数fに対して,$f\chi_A$は$\mathfrak{A}(A)$−可測である。

但し,$\mathfrak{A}(A) = \{(A \cap A_1) \cup (A^c \cap A_2) : A_i \in \mathfrak{A}_i, i=1,2\}$.

さて,$\mathcal{B}(\mathcal{S}) \cap A_i = \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' \cap A_i$を示せばよいのだが,これは,$\mathcal{S}$と$A$の定義,$A_i$の性質,$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$の定義を考え合わせると明らかである。(証終)

[補題 3.3] $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}$ を定理 3.1 で述べたものとする。

$A=\bigcup_{1\le i\le\infty}(S_i^1\cap S_i)$ とおく。このとき，任意の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$－$\mathcal{P}$－可積分関数 f に対して，次の(i)(ii)が成り立つ。

(i) $A\supseteq A_1$, $A_1\in\Omega$ ならば，すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して

$$E_p[f\chi_{A_1}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A_1}=E_p[\chi_{A_1}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot\chi_{A_1},\ [\Omega,p].$$

(ii) $A^c\supseteq A_2$, $A_2\in\Omega$ ならば，すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して．

$$E_p[f\chi_{A_2}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\chi_{A_2}=E_p[\chi_{A_2}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\cdot f\cdot\chi_{A_2}.\ [\Omega,p].$$

証明）

(i), (ii) を同時に証明する。

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'=\{(A_i\cap B_1)\cup(A_i^c\cap B_2)\ ;\ B_1,B_2\in\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)\}$$

とおく。

$$\begin{aligned}&E_p[f\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)']\\&=\frac{E_p[f\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i}+\frac{E_p[f\chi_{A_i}\cdot\chi_{A_i^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i^c},\ [\Omega,p].\\&=\frac{E_p[f\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i}.\end{aligned}$$

$f\chi_{A_i}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$－可測である。

故に　$E_p[f\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)']=f\chi_{A_i}$，$[\Omega,p]$.

よって．$f\chi_{A_i}=\dfrac{E_p[f\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i}$

A_i 上で．$E_p[\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]>0$. $[\Omega,p]$

だから．$E_p[f\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]\chi_{A_i}=E_p[\chi_{A_i}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]\cdot f\cdot\chi_{A_i}$.

（証終）

(定理3.1の証明)

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$-$\mathcal{P}$-可積分関数fがすべての$p\in\mathcal{P}$に対して$\int_{\mathfrak{X}} f\,dp=0$ならば　$f=0$, $[\mathcal{A},\mathcal{P}]$を示す。

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$: suff. for $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$,　$\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)\supseteq\mathcal{A}(\mathcal{S})\supseteq\mathcal{B}(\mathcal{S})$ だから.

fを$\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$-可測関数とみなせば, fの$\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$に関する条件付期待値は$p$に無関係である。故に$E[f\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)$と表わす。

仮定より. $\int_{\mathfrak{X}} E[f\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\,dp=\int_{\mathfrak{X}} f\,dp=0$.

これがすべての$p\in\mathcal{P}$について成り立つので.

$(\mathfrak{X},\mathcal{B}(\mathcal{S}_1),\mathcal{P})$の completeness より.

$$E[f\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)=0\quad[\mathcal{A},\mathcal{P}].$$

同様にして.

$$E[f\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)](x)=0.\quad[\mathcal{A},\mathcal{P}].$$

$A=\bigcup_{1\le i\le\infty}(S_i\cap S_i')$ とおく。

$$\begin{aligned}0&=E[f\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\qquad[\mathcal{A},\mathcal{P}]\\&=E[f\chi_A\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)+E[f\chi_{A^c}\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\\&=E[f\chi_A\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\cdot\chi_A(x)+E[f\chi_A\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\cdot\chi_{A^c}(x)\\&\quad+E[f\chi_{A^c}\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\end{aligned}$$

[補題3.3], $=E[\chi_A\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot\chi_A+E[f\chi_A\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A^c}$

$\quad+E[f\chi_{A^c}\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\qquad[\mathcal{A},\mathcal{P}]$.

また. 同様にして.

$$0=E[f\chi_A\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]+E[f\chi_{A^c}\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\chi_A+f\chi_{A^c}\cdot E[\chi_{A^c}\mid\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]$$
$$[\mathcal{A},\mathcal{P}]$$

これだけの準備をしておいて，nに関する帰納法を用いて，各nについて $p\{\{x : f(x) \neq 0\} \cap \bigcup_{i=0}^{n} S_i\} = 0$ がすべての $p \in \mathcal{P}$ について成り立つことを示す。（帰納法をきれいに行うために，ここでは，S_0をもちだすことにする。）

(i) $n = 0$ のとき　$S_0 = \phi$（仮定[I]）だから

$p\{\{x : f(x) \neq 0\} \cap S_0\} = 0$ がすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して成り立つ。

(ii) $n = m$ のとき成り立つならば，$n = m+1$ のとき成り立つことを示す。

$M = \{x : f(x) \neq 0\}$ とおく。

$(M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i)$ を $(M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A)$ と $(M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A^c)$ に分け，それぞれについて，すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して，測度がゼロであることを示す。

Aは最初に定義したものである。

任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$
\begin{aligned}
& p\{M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A\} \\
&= p\{M \cap \bigcup_{i=0}^{m} S_i \cap A\} + p\{M \cap S_{m+1} \cap A\} \\
&= p\{M \cap S_{m+1} \cap A\} \\
(*) &\leq p\{\{x : E[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0\} \cap S_{m+1} \cap A\} \\
&= 0 \qquad \because A\text{上では，} E_p[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] > 0. \ [\Omega, p].
\end{aligned}
$$

$(*)$ は，$M \cap S_{m+1} \cap A \subseteq \{x : E[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] = 0\} \cap S_{m+1} \cap A$ による。
$[\Omega, p]$.

(ii) 前に得た等式

$$0 = E[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot \chi_A + E[f\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A^c} + E[f\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)],\ [\Omega, \mathcal{P}]$$

から，$S_{m+1}\cap A$ 上で $E[f\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0,\ [\Omega, \mathcal{P}]$ を示せばよい。

示されれば，A 上で $E[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A^c} = 0$，だから

$$0 = E[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot \chi_A\ ,\quad [\Omega, \mathcal{P}]$$

を得る。故に $f(x) \neq 0$ ならば A 上では，$E[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0$ ならざるを得ない。すなわち上の包含関係が成り立つ。

$S_{m+1}\cap A$ 上で $E[f\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] = 0.\ [\Omega, \mathcal{P}]$.

(i) A の定義より $S_{m+1}\cap A = S^1_{m+1}\cap A$. だから．

$S^1_{m+1}\ (\in \mathcal{B}(\mathcal{S}_1))$ 上で示せば十分。

任意の $p\in\mathcal{P}$ と任意の $B\in\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$ に対して．

$$\int_{B\cap S^1_{m+1}} E[f\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\,dp$$

$$= \int_* \chi_B\cdot\chi_{S^1_{m+1}}\cdot f\cdot\chi_{A^c}\cdot dp$$

$$= 0.\quad \left(\because\ S^1_{m+1}\cap A^c \subset \bigcup_{i=0}^{m} S_i\right)$$

さて．一方．すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して

$$p\{M\cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A^c\}$$

$$= p\{M\cap S_{m+1}\cap A^c\}$$

$$\leqq p\{\{x : E[\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] = 0\}\cap S_{m+1}\cap A^c\}$$

$$= 0$$

は前に得た等式

$$0 = E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\delta_2)] + E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\delta_2)]\chi_A + f\cdot\chi_{A^c}\cdot E[\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\delta_2)]$$

を用いて全く同様に示される。

これですべての $p \in \mathcal{P}$ に対して，$p\{M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i\} = 0$ が示された。

以上によって，各 n $(0 \leq n < \infty)$ に対して，すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して，$p\{M \cap \bigcup_{i=0}^{n} S_i\} = 0$.

なお、仮定[II]よりすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $p\{S_\infty\} = 0$.

従って $p\{M \cap \bigcup_{0 \leq i \leq \infty} S_i\} = p\{M \cap \bigcup_{1 \leq i < \infty} S_i\} = \lim_{n\to\infty} p\{M \cap \bigcup_{i=1}^{n} S_i\} = 0$.

これがすべての $p \in \mathcal{P}$ について成り立つ。

すなわち $f(x) = 0$ $[\mathcal{O}\!\iota, \mathcal{P}]$.　　　(証終)

[定義 3.2] seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{O}\!\iota, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}\!\iota_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ を番号 n で truncate するとは，$\mathcal{S} \ni S_n$ を $S_n' = (\bigcup_{i=1}^{n-1} S_i)^c$ でおきかえること。(但し $n \neq \infty$)

[系 3.1]

各 n $(1 \leq n < \infty)$ に対して，$(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$ が complete であるとき complete seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{O}\!\iota, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}\!\iota_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ を任意の番号で truncate して得られる seq. proc. は complete である。　但し $\{\mathcal{B}_n\}_n$ は sufficient seq. とする。

証明)

任意の n を fix する。

$S_n = \mathscr{X}$ である stopping rule を $\mathcal{S}$ と書くと，$\mathcal{B}(\mathcal{S}_n) = \mathcal{B}_n$ であるから seq. proc. $(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, \mathcal{P}, \{\mathfrak{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S}_n)$ は complete である。$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}_n$ を合成して得られる stopping rule を与えたものが truncated seq. proc. であるから，定理3.1より，それは complete である。（証終）

［定義3.3］ $S_n = \mathscr{X}$ である stopping rule を与えた procedure を fixed sample size の procedure という。

［定理3.2］ seq. proc. $(\mathscr{X}, \mathfrak{A}, \mathcal{P}, \{\mathfrak{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が complete ならば，任意の $p \in \mathcal{P}$ と m, n に対して，$\mathcal{B}_m$ − 可積分関数 $h(x)$ が，$E_p[h\chi_{S_m} \mid \mathcal{B}_n](x) = 0$，$[\mathfrak{A}, p]$ をみたすとき，$h(x)\chi_{S_m}(x) = 0$，$[\mathfrak{A}, p]$ が成り立つ。

証明）

対偶を示す。$m = n$ のときは明らかだから $m \neq n$ としておく。

ある $p \in \mathcal{P}$ と，m, n が存在し，かつ，ある $\mathcal{B}_m$ − 可積分関数 $h(x)$ と，$p(N) > 0$ である $N \in \mathcal{B}_m$ が存在して，

$$E_p[h\chi_{S_m} \mid \mathcal{B}_n](x) = 0, \quad [\mathfrak{A}, p],$$

$$h(x)\chi_{S_m}(x) \neq 0, \quad x \in N.$$

をみたすとせよ。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in S_i \quad (i \neq m) \\ h(x), & x \in S_m \end{cases}$$

と定義すれば F は $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-可積分関数で

すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して．

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} F\,dp &= \int_{\mathcal{X}} E_p[F \mid \mathcal{B}_n]\,dp \\ &= \int_{\mathcal{X}} E_p[F\chi_{S_m} \mid \mathcal{B}_n]\,dp + \int_{\mathcal{X}} E_p[F\chi_{S_m^c} \mid \mathcal{B}_n]\,dp \\ &= 0 \end{aligned}$$

しかし． $p\{x : F(x) \neq 0\} = p(N) > 0$.

これは．$(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ の completeness に矛盾する。（証終）

［定理 3.3］各 n $(1 \leq n < \infty)$ に対して，$(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$ が complete であり．seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \{\mathcal{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が sufficient かつ complete であるとする。このとき．

任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して．

命題 (A)．
- $p(S_{n-1}) > 0$, $p(S_n) > 0$ であり．
- $\mathcal{A}_{n-1} \ni A$, $\mathcal{B}_n \ni B$ に対して
- $p(A) > 0$, $p(B) > 0$
- ならば $p(A \cap B) > 0$

が成り立つ n $(\neq \infty)$ は．存在しない。

証明)

対偶を示す。

あるp_0に対して、このようなn_0があったとせよ。
n_0でtruncateしたprocedureがcompleteでないことを示せば、系3.1より、もとのprocedureはcompleteでない。

S_{n_0}を$S'_{n_0} = (\bigcup_{i=1}^{n_0-1} S_i)^c$におきかえる。このとき、$\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_{n_0-1}$ $i=1,2,\cdots,n_0-1$より、$S'_{n_0} \in \mathfrak{A}_{n_0-1}$、もちろん$S'_{n_0} \in \mathfrak{A}_{n_0}$でもある。
また$S_{n_0} \subseteq S'_{n_0}$だから$p_0(S'_{n_0}) > 0$.
おきかえたstopping rule (truncated)を$\mathcal{S}_{n_0}$と書く。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \bigcup_{i=1}^{n_0-2} S_i \\ 1 & , \quad x \in S_{n_0-1} \\ -\dfrac{E[\chi_{S_{n_0-1}} | \mathcal{B}_{n_0}](x)}{E[\chi_{S'_{n_0}} | \mathcal{B}_{n_0}](x)} & , \quad x \in S_{n_0} \end{cases}$$
(∵ $\mathcal{B}_{n_0}$: suff. for $\mathfrak{A}_{n_0}$

と定義すれば Fは$\mathcal{B}(\mathcal{S}_{n_0})$－可測関数（可積分）である。
なお、Fの定義は$p \in \mathcal{P}$に依存していない。
また、$E[\chi_{S'_{n_0}} | \mathcal{B}_{n_0}](x) > 0$. $[\mathfrak{A}, p_0]$である。

∵ $\chi_{S'_{n_0}} \geq 0$だから$E[\chi_{S'_{n_0}} | \mathcal{B}_{n_0}] \geq 0$, $[\mathfrak{A}, p_0]$.
仮に$B \in \mathcal{B}_{n_0}$が存在して、

$$p_0(B) > 0, \quad E[\chi_{S'_{n_0}} | \mathcal{B}_{n_0}](x) = 0, \quad x \in B$$

をみたすならば

$$\int_B E[\chi_{S'_{n_0}} | \mathcal{B}_{n_0}] dp = p(S'_{n_0} \cap B) = 0.$$

これは、命題(A)に矛盾する。

このことは、次の等式の㊉の箇所で用いられる。

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_{n_0}) \subseteq \mathcal{O}_{n_0}$ だから．$\mathcal{B}_{n_0}$: suff. for $\mathcal{O}_{n_0}$ より．F の $\mathcal{B}_{n_0}$ に関する条件付期待値は．p に無関係である。

すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して．

$$E[F \mid \mathcal{B}_{n_0}] = E[F\chi_{\bigcup_{i=1}^{n_0-2} S_i} \mid \mathcal{B}_{n_0}] + E[F\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]$$
$$+ E[F\chi_{S'_{n_0}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]$$
$$= E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] + E\left[-\frac{E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]}{E[\chi_{S'_{n_0}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]}\chi_{S'_{n_0}} \mid \mathcal{B}_{n_0}\right]$$
$$(*) \quad = E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] - E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]$$
$$= 0, \qquad [\mathcal{O}, p_0].$$

故に．すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して．

$$\int_{\mathcal{X}} F\,dp = \int_{\mathcal{X}} E[F \mid \mathcal{B}_{n_0}]\,dp = 0.$$

しかし．F は少なくとも S_{n_0-1} 上で ゼロでない値をとり．

$p_0(S_{n_0-1}) > 0$ である $p_0 \in \mathcal{P}$ が存在する。

故に truncated procedure が complete でない。（証終）

［例］ $X_1, X_2, \cdots\cdots$ をそれぞれ，平均未知．分散既知の正規分布に従う独立確率変数とする。$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とすれば fixed sample size の procedure は complete であるが fixed でない．どんな procedure を考えてみても定理 3.3 の命題 (A) が成り立つので complete でない。

'70

参考文献

[1] Bahadur, R.R. (1954)
"sufficiency and statistical decision functions."
A.M.S. Vol. 25. 423～462

[2] Berk, K.H. (1969)
"Strong consistency of certain sequential estimators."
A.M.S. Vol. 40. No. 4 1492～1495.

[3] Lehmann, E.L. & Charles Stein (1950)
"Completeness in the sequential case."
A.M.S. Vol. 21 376～385

~~[4]~~